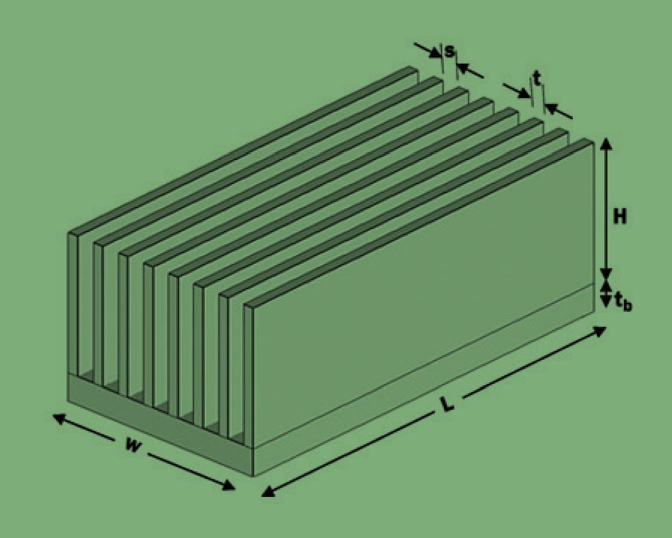
TRANSFERENCIA DE CALOR: ALETAS

por

LUIS MANUEL MOCHÓN CASTRO
DANILO MAGISTRALI



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-89-07

TRANSFERENCIA DE CALOR: ALETAS

por

LUIS MANUEL MOCHÓN CASTRO
DANILO MAGISTRALI

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-89-07

C U A D E R N O S
D E L I N S T I T U T O
J U A N D E H E R R E R A

NUMERACIÓN

2 Área
51 Autor
09 Ordinal de cuaderno (del autor)

TEMAS

1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN
0 VARIOS

Transferencia de calor: aletas.

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestión y portada: Almudena Gil Sancho.
CUADERNO 400.01 / 3-89-07
ISBN-13 (obra completa): 978-84-9728-452-3
ISBN-13: 978-84-9728-459-2
Depósito Legal: M-13383-2013

Índice

ALETAS

1. Introducción

Cuando es necesario aumentar la potencia calorífica por convección de una superficie $[q = h\,A\Delta T]$, bien hacia el exterior o hacia el interior de la misma, hay que incrementar alguna de las variables básicas que rigen el intercambio de calor: coeficiente de convección h, diferencia de temperatura ΔT o área de intercambio A. Caso de optar por ésta última, puede hacerse más grande el área base (figura 1.b) o bien adosar a la superficie una serie de protuberancias, denominadas aletas (figura 1.c). Este capítulo está dedicado íntegramente al estudio de las aletas, desde el punto de vista morfológico y de las ecuaciones que rigen el intercambio de calor.

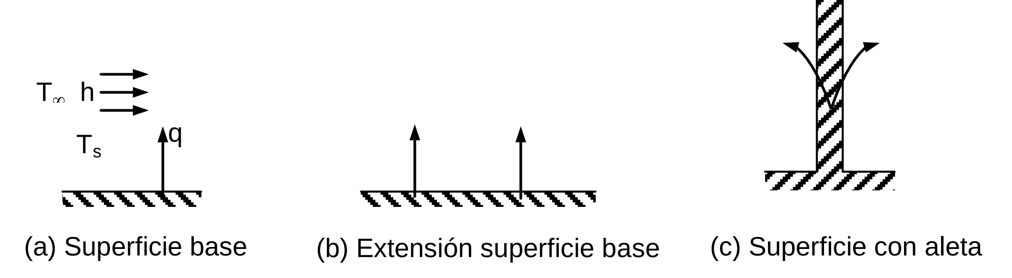


Figura 1. Aumento del área de convección.

En el uso de aletas no existe ninguna limitación al sentido del flujo de calor, de forma que puede tratarse de una aplicación de refrigeración (flujo de calor hacia el exterior) o de calefacción (flujo hacia el interior). Son múltiples las aplicaciones de las aletas, pero se puede afirmar que son frecuentes cuando el coeficiente de convección es bajo, tal como ocurre en gases como el aire, especialmente en condiciones de convección natural.

Ejemplos de uso de aletas:

- Refrigeración de motores refrigerados por aire (motocicletas).
- Intercambiadores de calor (radiador automóvil, condensador y evaporador de equipos de aire acondicionado, etc.).
- Refrigeración de componentes electrónicos.
- Refrigeración de elementos combustibles de reactores nucleares.
- Equipos de refrigeración y calentamiento en la industria química.
- Refrigeración de máquinas eléctricas, etc.

La superficie de la aleta no es tan eficaz como la original debido a que su resistencia conductiva provoca una reducción de la diferencia de temperatura T_s-T_∞, pero globalmente la contribución de las aletas será beneficiosa siempre que contribuya a incrementar la potencia calorífica intercambiada.

2. Clasificación geométrica de las aletas

Las aletas se clasifican según diferentes criterios. Atendiendo a la forma de la superficie de la base (donde apoya la aleta) se distinguen:

- Aletas rectas: la base es un plano recto
- Aletas anulares: la base es una superficie cilíndrica
- Agujas: tienen forma de barra

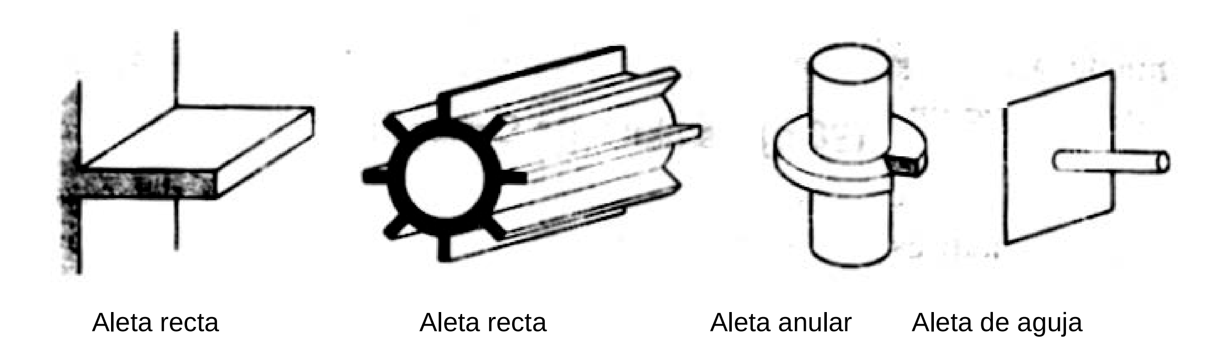


Figura 2. Tipos de aletas por la forma de la base.

Por la forma de la sección longitudinal, las aletas rectas y anulares se clasifican en: rectangulares, triangulares, trapezoidales, parabólicas (cóncavas o convexas) e hiperbólicas:

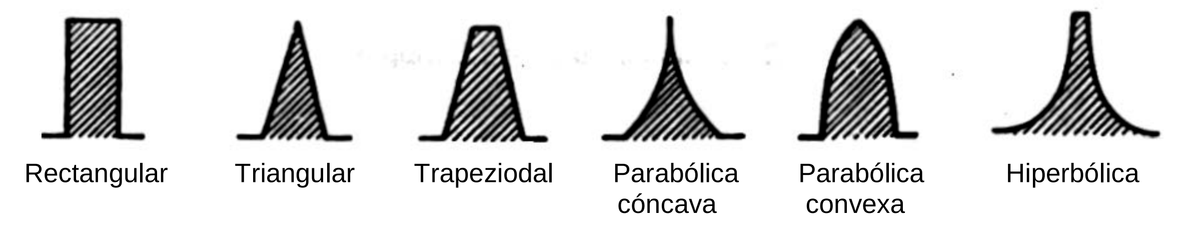


Figura 3. Tipos de aletas por la forma de la sección longitudinal.

Las aletas de aguja suelen tener una sección transversal circular, mientras que la sección longitudinal puede ser rectangular, triangular o parabólica (cóncava o convexa):

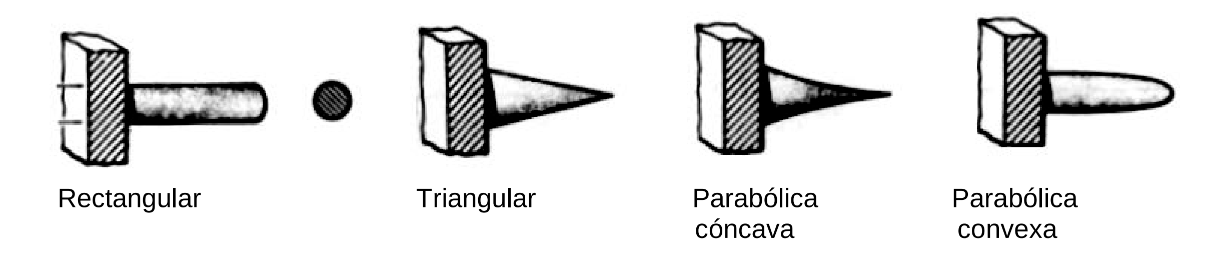


Figura 4. Aletas de aguja.

Las dimensiones de las aletas son muy variadas, pero la relación longitud/espesor suele ser de 5 a 50 para espesores comprendidos entre 0,5 y 10 mm.

La disposición de las aletas suele ser de forma múltiple:

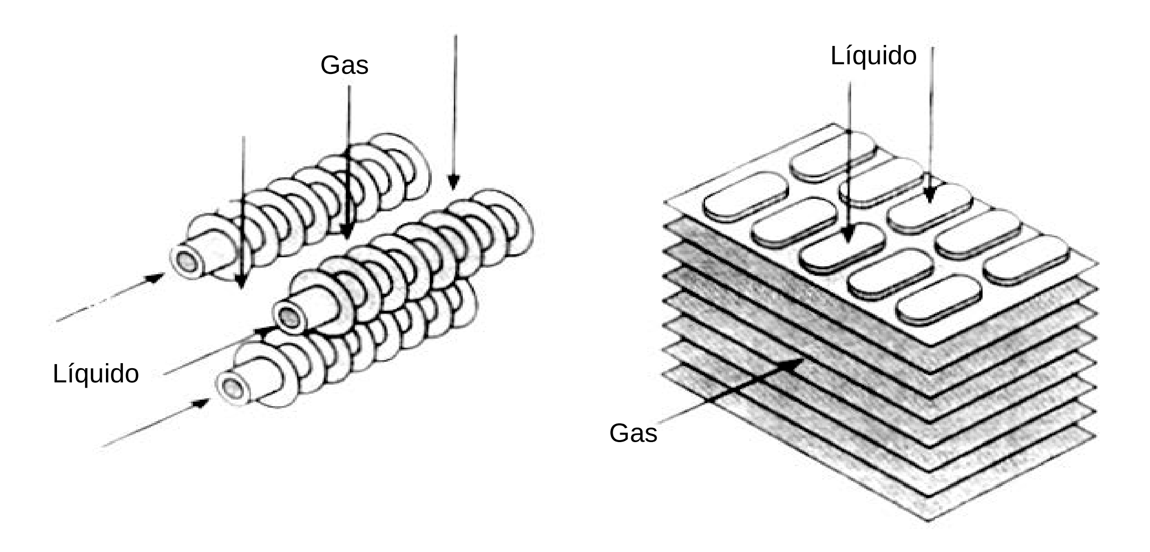


Figura 5. Intercambiadores de calor con superficies aleteadas.

En los intercambiadores de calor, donde hay implicados dos fluidos, las aletas deben estar situadas en el lado del fluido de menor coeficiente de convección, de manera que éste bajo valor quede compensado con el mayor área A de transferencia, evitándose una resistencia térmica elevada (R=1/hA). Según esto, cuando los fluidos de trabajo sean un líquido y un gas, las aletas deben estar dispuestas en el lado del gas, ya que como es sabido $k_{gases}<k_{líquidos}$, lo que conlleva que $h_{gases}<h_{líquidos}$. Las aletas adosadas a tubos suelen estar dispuestas exteriormente, aunque también pueden encontrarse en el interior.







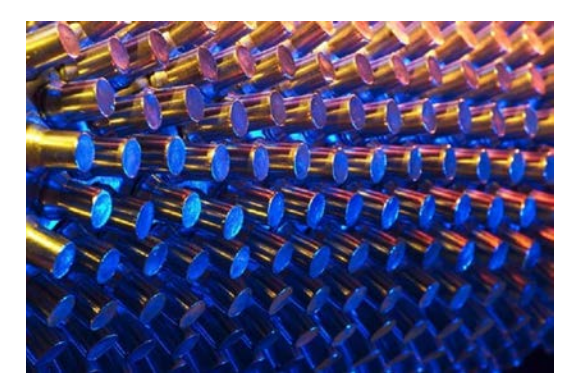


Figura 6. Algunos tipos de aletas

3. Modelo unidimensional de aletas

En una aleta corta de longitud L y de gran espesor t, pero suficientemente ancha (w grande), el flujo de calor es básicamente bidimensional, T=T(x,y). La ecuación de conducción dentro de la aleta y sus condiciones de contorno, supuesto que está sometida a convección en toda su superficie exterior, es:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)=0$$

cc: $x=0 \qquad T=T_b(y)$

$x=L \qquad -k\frac{\partial T}{\partial x}=h(T-T_\infty)$

$y=\pm t/2 \qquad -k\frac{\partial T}{\partial y}=h(T-T_\infty)$

donde T_b representa la temperatura de la base de la aleta, o superficie de apoyo de la misma. En estas condiciones la temperatura no es uniforme en toda la sección $T_b=T_b(y)$.

En la mayoría de las aletas se puede suponer con buena aproximación conducción unidimensional T=T(x), lo cual simplifica enormemente el cálculo analítico de la potencia calorífica transferida. No obstante, para que tenga lugar conducción unidimensional es preciso que el denominado número de Biot sea lo suficientemente pequeño, como se deducirá seguidamente. La potencia térmica que atraviesa la superficie superior, o la inferior, de la aleta se puede expresar de manera aproximada a partir de resistencias conductiva y convectiva como:

$$q_y \approx \frac{T_{y=0}-T_{y=t/2}}{\frac{t/2}{kWL}}=\frac{\Delta T_{sólido}}{R_{cond}}$$

$$q_y \approx \frac{T_{y=t/2}-T_\infty}{\frac{1}{hWL}}=\frac{\Delta T_{fluido}}{R_{conv}}$$

Igualando y ordenando:

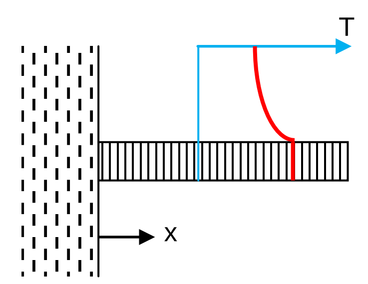
$$\frac{\Delta T_{sólido}}{\Delta T_{fluido}}=\frac{R_{cond}}{R_{conv}}=Bi$$

donde Bi es el denominado número de Biot, definido como el cociente entre la resistencia conductiva de la mitad del espesor de la aleta y la resistencia convectiva.

Bi da idea del cociente de la diferencia de temperatura dentro del cuerpo respecto a la diferencia de temperatura en el fluido. Se puede decir que la transferencia de calor dentro de una aleta es unidimensional cuando $\Delta T_{sólido}$ es suficientemente pequeño comparado con ΔT_{fluido}, lo que en términos de Bi se expresa como:

$$B_i = \frac{h\,t}{2k} \leq 0,1$$

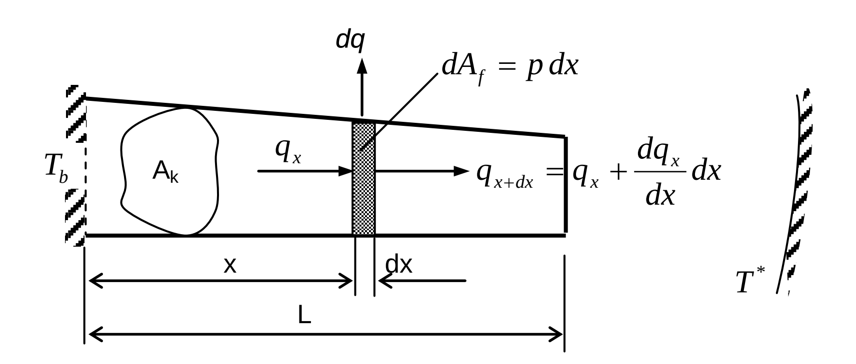
En una aleta con conducción estrictamente 1D (Bi=0) las isotermas serían superficies perpendiculares al eje de la aleta, esto es, T=T(x).



Todo el estudio de aletas que sigue en este capítulo las trata como unidimensionales (Bi<0,1).

4. Ecuación diferencial general de aletas rectas

Sea una aleta recta de longitud L y conductividad k que presenta una sección transversa $A_k(x)$ variable. La aleta se supone en contacto con un fluido con coeficiente de convección medio h_c sobre y envuelta por un entorno radiante a temperatura T^* con la que intercambia calor con un coeficiente de radiación medio h_r.



Del equilibrio energético de una rebanada de espesor dx:

$$\not{q}_x = (\not{q}_x + dq_x) + h_c\; dA_f\,(T - T_\infty) + h_r\; dA_f\,(T - T^*)$$

Si $T^*=T_\infty$, o al menos $T^*\approx T_\infty$ (como es habitual en la práctica) podría considerarse una única h que incluya h_c y h_r, esto es, $h=h_c+h_r$. Así se considerará en adelante. Por la ecuación de Fourier:

$$dq_x = \frac{dq_x}{dx}dx = \frac{d}{dx}\left(-kA_k\frac{dT}{dx}\right)dx$$

Entonces:

$$\frac{d}{dx}\left(-kA_k\,\frac{dT}{dx}\right)dx + h\,dA_f\,(T - T_\infty) = 0$$

Ordenando se obtiene finalmente:

$$\frac{d}{dx}\left(kA_k\,\frac{dT}{dx}\right) - h\frac{dA_f}{dx}\left(T - T_\infty\right) = 0 \qquad (1)$$

que constituye la ecuación diferencial general que permite obtener la distribución de temperatura en una aleta 1D en régimen estacionario, sin generación interna de calor y con conductividad k variable con la temperatura. Como condiciones de contorno de la aleta habrá que considerar lo que ocurre en la base (su temperatura se supone conocida y de valor T_b) y en el extremo, pudiendo presentar alguno de los casos típicos siguientes:

x=0 $\quad T=T_b$

x=L $\quad -k\,\dfrac{dT}{dx} = h^*\left(T - T_\infty\right)$ Convectiva — h^*, T_∞

$\quad \dfrac{dT}{dx} = 0$ Adiabática — Aislante térmico

$\quad T=T_L$ En temperatura — T_L

$\quad T=T_\infty$ Infinitamente larga — ∞

En la condición de contorno convectiva se ha contemplado la posibilidad de que el coeficiente de convección+radiación (h^*) en el extremo de la aleta sea diferente al que tiene lugar en su superficie lateral (h).

Una vez obtenida la distribución de temperatura se puede determinar la potencia calorífica q_f evacuada por la aleta mediante:

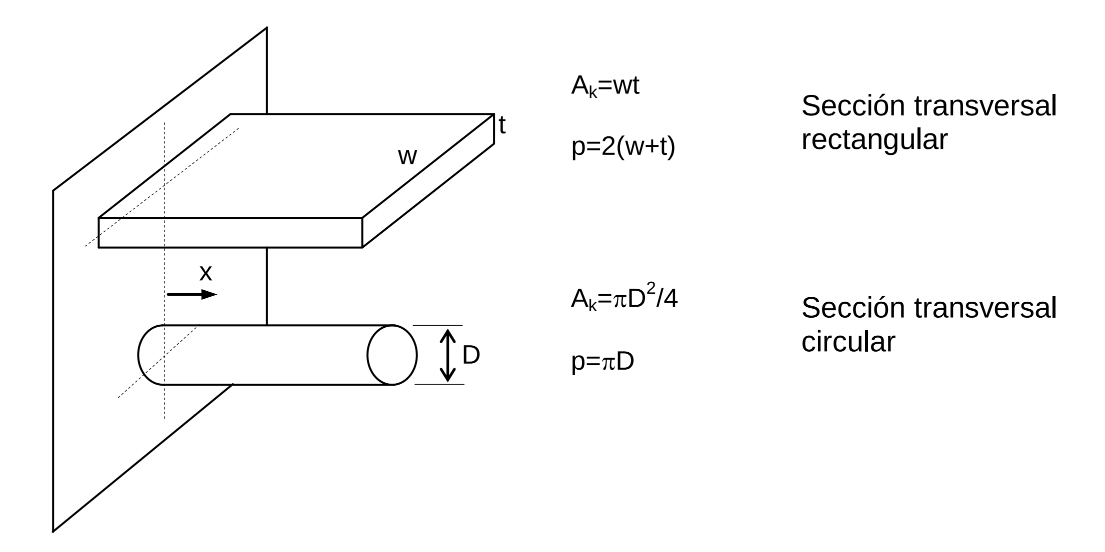
- La conducción en la base de la aleta:

$$q_f = -kA_{k,b}\,\frac{dT}{dx}\bigg|_{x=0}$$ siendo $A_{k,b}$ el área de conducción en la base.

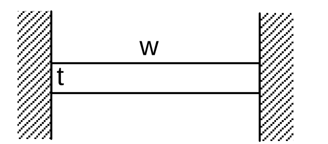
- La convección en toda la superficie de la aleta:

$$q_f = \int_{A_f} h\left(T - T_\infty\right)dA_f$$

4.1. Aletas de sección transversal constante (A_k=cte)



Si la aleta de sección transversal rectangular estuviese confinada lateralmente por un material térmicamente aislante:



$$A_k = wt$$
$$p = 2t$$

Supuesto que la conductividad del material es constante:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hp}{kA_k}\left(T - T_\infty\right) = 0$$

Realizando un cambio de variable:

$$\theta = T - T_\infty \qquad d\theta = dT$$

y designando como $m^2 = \dfrac{h\ p}{k\ A_k}$, la ED queda como:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0$$

que constituye una ecuación diferencial linear homogénea de segundo orden con coeficientes constantes, cuya solución general es de la forma:

$$\theta(x) = Ae^{mx} + Be^{-mx}$$

o bien:

$$\theta(x) = C_1 \sinh(mx) + C_2 \cosh(mx)$$

donde A y B o C_1 y C_2 se determinan de las condiciones de contorno. Resolviendo para una aleta adiabática en el extremo:

$$T\big|_{x=0} = T_b \quad \Rightarrow \quad \theta\big|_{x=0} = T_b - T_\infty = \theta_b$$

$$\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=L} = 0$$

de donde:

$$C_1 = -\theta_b \tanh(mL) \qquad C_2 = \theta_b$$

Finalmente, la distribución de temperatura θ(x) a lo largo de la aleta y la potencia calorífica q_f evacuada por la misma valen:

$$\frac{\theta(x)}{\theta_b} = \frac{\cosh\left[m(L-x)\right]}{\cosh(mL)}$$

$$q_f = -kA_{k,b}\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0} = k\,A_k\theta_b\,m\tanh(mL) = \sqrt{h\,pkA_k}\,\theta_b\tanh(mL)$$

En la tabla mostrada siguiente se presentan la distribución de temperatura θ(x) y la potencia calorífica q_f evacuada por aletas rectas de sección constante para diferentes condiciones de contorno en el extremo.

Condición de contorno en x=L	θ (x)/θ b	Potencia calorífica evacuada, q_f
Convectiva $-k\left.\frac{d\theta}{dx}\right\|_{x=L} = h\theta(L)$	$\frac{\cosh[m(L-x)]+\frac{h}{mk}\operatorname{senh}[m(L-x)]}{\cosh(mL)+\frac{h}{mk}\operatorname{senh}(mL)}$	$M\,\frac{\operatorname{senh}(mL)+\frac{h}{mk}\cosh(mL)}{\cosh(mL)+\frac{h}{mk}\operatorname{senh}(mL)}$
Adiabática $\left.\frac{d\theta}{dx}\right\|_{x=L} = 0$	$\frac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL)}$	$M\tanh(mL)$
En temperatura $\theta(L) = \theta_L$	$\frac{\frac{\theta_L}{\theta_b}\operatorname{senh}(mx)+\operatorname{senh}[m(L-x)]}{\operatorname{senh}(mL)}$	$M\,\frac{\cosh(mL)-\frac{\theta_L}{\theta_b}}{\operatorname{senh}(mL)}$
$L \to \infty$ $\theta(L) = 0$	e^{-mx}	M

$\theta = T - T_\infty$ $\qquad \theta_b = \theta(0) = T_b - T_\infty$ $\qquad \theta_L = \theta(L) = T_L - T_\infty$

$m^2 = \frac{h\;p}{k\;A_k}$ $\qquad M = \theta_b\sqrt{h\,p\,k\,A_k}$

Del análisis de los valores de la tabla se pueden extraer las siguientes conclusiones (los términos que acompañan a M en las expresiones de la potencia q_f, son todos menores que la unidad):

- La máxima potencia evacuada corresponde a la aleta infinitamente larga.

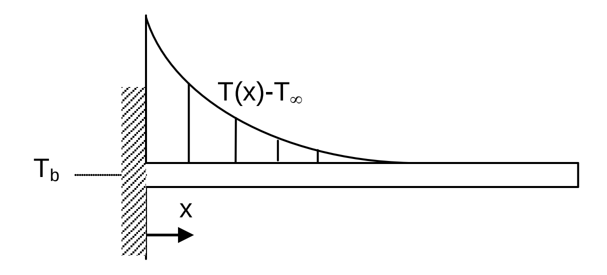
- Dado que la máxima potencia evacuada corresponde a la aleta infinitamente larga, pero teniendo en cuenta que ésta es una aleta impracticable, interesa, por tanto, aletas lo más largas posible. Sin embargo, no es necesario emplear aletas excesivamente largas para que q_f esté próximo al de la aleta infinitamente larga. Esto se puede comprobar en el siguiente ejemplo, en el que se calcula la longitud que debería tener una aleta de aguja de 3 mm de diámetro con h=10 W/m^{2}K (convección natural con aire) y k=150 W/mK (aleación de aluminio) para que disipe el 98% de la potencia correspondiente a una aleta infinitamente larga (q_f=M):

  $L_{convectiva}$=0,243 m

  $L_{adiabática}$=0,244 m

  $L_{T=cte}$=0,169 m (T_L=30 ºC)

  Esto tiene su justificación en el hecho que en la medida que nos alejamos de la base de una aleta se reduce su diferencia de temperatura con el ambiente y con el ello la potencia transferida por cada unidad de área. En la aleta infinita llega un punto a partir del cual ya no hay transferencia de calor con el ambiente. Gráficamente:



  Esto hace posible estimar la longitud de una aleta recta a partir de la cual de la cual el cálculo de la potencia intercambiada por la aleta puede realizarse más cómodamente por la expresión más sencilla de la aleta adiabática. Comparando las expresiones para aleta adiabática e infinitamente larga, se puede establecer:

$$\frac{q_{f-adiabática}}{q_{f-L\to\infty}} = \tanh(mL) \geq 0{,}99 \quad \to \quad L \geq \frac{2{,}65}{m} = 2{,}65\sqrt{\frac{k\,A_k}{h\,p}}$$

- Dado que la potencia q_f disipada por la aleta, independientemente de la condición de contorno en el extremo, es proporcional a $M=\theta_b(hpkA_k)^{1/2}$, los factores que mejoran la potencia transferida por la aleta son:

  - El producto $p\cdot A_k$ debe ser lo más elevado posible, por tanto, interesan aletas divididas, mejor que aletas alargadas y mejor éstas que aletas gruesas.

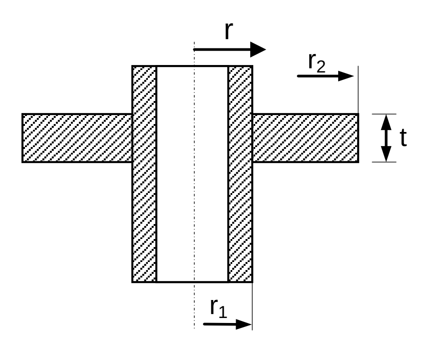


- Deben emplearse materiales de elevada conductividad, normalmente cobre y aluminio. Sería preferible el cobre dada su mayor conductividad aunque, sin embargo, es más habitual el uso del aluminio por su más bajo coste y menor densidad (menor peso).

- El coeficiente de convección+radiación debe ser elevado (mejor convección forzada que natural).

4.2. Aletas anulares de espesor constante

Se consideran como tales aquellas aletas cuya superficie de la base es cilíndrica. Se designarán por r_1 y r_2 los radios entre los que está comprendida la aleta y t al espesor de la misma.



Haciendo un análisis similar al de las aletas rectas, se llega a una ecuación diferencial semejante a la (1), con la diferencia que ahora está expresada en función del radio r:

$$\frac{d}{dr}\left(kA_k\frac{dT}{dr}\right)-h\frac{dA_f}{dr}\left(T-T_\infty\right)=0$$

Para un radio genérico $r_1<r<r_2$, el área convectiva A_f acumulada y el área conductiva A_k serán:

$$A_f=2\pi\left(r^2-r_1^2\right) \qquad\qquad A_k=2\pi rt$$

Sustituyendo y asumiendo que la conductividad k del material es constante:

$$\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}-\frac{2h}{kt}\left(T-T_\infty\right)=0$$

cc: $r=r_1$ $T=T_b$

$r=r_2$ $-k\frac{dT}{dr}=h\left(T-T_\infty\right)$ convectiva

$\frac{dT}{dr}=0$ adiabática

$T=T_L$ en temperatura

$T=T_\infty$ infinitamente larga

Realizando el cambio de variable:

$$\theta = T - T_\infty \quad \rightarrow \quad d\theta = dT$$

y designado como $m^2 = \dfrac{2h}{kt}$ la ED queda como:

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\theta}{dr} - m^2\theta = 0$$ Ec. diferencial de Bessel modificada de orden cero.

Resolviendo para aleta adiabática en el extremo:

$$\theta(r = r_1) = T_b - T_\infty = \theta_b$$

$$\left.\frac{d\theta}{dr}\right|_{r=r_2} = 0$$

La solución general de $\theta(r)$ es:

$$\theta(r) = C_1 \cdot I_0(mr) + C_2 \cdot K_0(mr)$$

siendo I_0 y K_0 las funciones de Bessel modificadas de orden cero de 1ª y 2ª especie, respectivamente. Las constantes C_1 y C_2 se determinan imponiendo las condiciones de contorno:

$r=r_1$ $\theta=\theta_b$ $\theta_b = C_1 \cdot I_0(mr_1) + C_2 \cdot K_0 \cdot (mr_1)$

$r=r_2$ $\dfrac{d\theta}{dr} = 0$ $0 = C_1 \cdot m \cdot I_1(mr_2) - C_2 \cdot m \cdot K_1(mr_2)$

de donde:

$$C_1 = \theta_b \frac{K_1(mr_2)}{I_0(mr_1)K_1(mr_2) + K_0(mr_1)I_1(mr_2)} \qquad C_2 = \theta_b \frac{I_1(mr_2)}{I_0(mr_1)K_1(mr_2) + K_0(mr_1)I_1(mr_2)}$$

siendo I_1 y K_1 las funciones de Bessel modificadas de orden 1 de 1ª y 2ª especie, respectivamente. Las funciones I_0, K_0, I_1 y K_1 se encuentran tabuladas.

y finalmente:

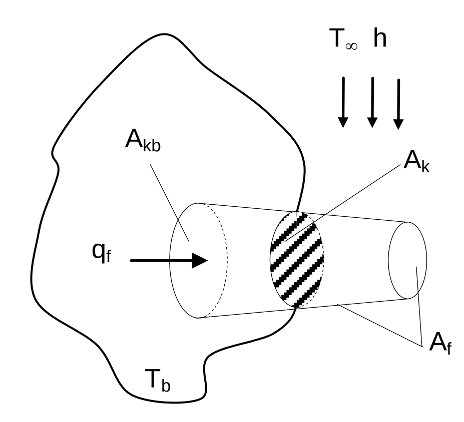
$$\boxed{\frac{\theta(r)}{\theta_b} = \frac{K_1(mr_2)I_0(mr) + I_1(mr_2)K_0(mr)}{I_0(mr_1)K_1(mr_2) + K_0(mr_1)I_1(mr_2)}}$$

Potencia evacuada:

$$\boxed{q_f = -kA_{k,b}\left.\frac{d\theta}{dr}\right|_{r=r_1} = 2\pi\, k\, r_1\, t\, m\, \theta_b \frac{I_1(mr_2)K_1(mr_1) - K_1(mr_2)I_1(mr_1)}{I_0(mr_1)K_1(mr_2) + K_0(mr_1)I_1(mr_2)}}$$

5. Caracterización de una aleta

Sea una aleta cualquiera con área de conducción de la base A_{kb}, área de conducción genérica A_k, área convectiva total A_f, que disipa una potencia térmica q_f, presenta un coeficiente total de convección y radiación h y siendo T_b la temperatura de la base. Como hipótesis se establece que los coeficiente h sobre la aleta y sobre la superficie de la base sin la aleta, son iguales.



Eficacia, ε_f. Mide la potencia disipada por la aleta respecto a la que tenía lugar a través de la superficie de la base antes de instalar sin aleta:

$$\varepsilon_f = \frac{q_f}{q_{SIN\ ALETA}} = \frac{q_f}{hA_{kb}(T_b - T_\infty)} = \frac{q_f}{hA_{kb}\theta_b} \qquad 0 < \varepsilon_f < \infty$$

siendo $\theta_b = T_b - T_\infty$. El uso de aletas está justificado térmicamente cuando $\varepsilon_f > 1$ pues, en caso contrario, se disiparía más calor sin aleta que con ella. ε_f también puede expresarse en función de las resistencias térmicas de la aleta R_f y la debida a la convección sin aleta R_{kb}:

$$\varepsilon_f = \frac{\dfrac{1}{hA_{kb}}}{\dfrac{\theta_b}{q_f}} = \frac{R_{kb}}{R_f}$$

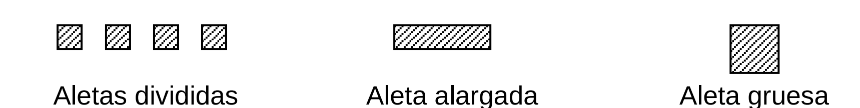
expresión que pone de manifiesto la justificación del uso de la aleta cuando su resistencia R_f sea menor que la resistencia a la convección R_{kb} de la base de la aleta. El valor máximo de ε_f se alcanza cuando lo es q_f y, por tanto, con la aleta infinitamente larga:

$$\text{Aleta recta:} \quad (\varepsilon_f)_{max} = \varepsilon_f\big|_{l\to\infty} = \sqrt{\frac{p\,k}{h\,A_{kb}}}$$

de donde se extraen las siguientes requisitos, generalizables independientemente de la condición de contorno en el extremo de la aleta, de cara a la maximización de ε_f:

- Materiales de elevada conductividad.

- p/A_{kb} elevado, lo que lleva a aletas divididas, mejor que aletas alargadas y mejor éstas que aletas gruesas.



- El uso de aletas está tanto más justificado cuanto menor es h, dado que en éstas circunstancias la resistencia a la convección sin aleta $R_{kb}=1/hA_{kb}$ es elevada y la adición de la aleta aumenta significativamente q_f y, por tanto, ε_f.

Rendimiento, η_f. Evalúa la potencia disipada por la aleta con relación a una aleta ideal, en la que la ausencia de resistencia a la conducción hace que toda ella esté a la temperatura de la base. Por tanto:

$$\eta_f = \frac{q_f}{q_{f_{IDEAL}}} = \frac{q_f}{hA_f\theta_b} \qquad 0 \le \eta_f \le 1$$

Solamente se alcanza $\eta_f=1$ cuando L=0 (solución trivial) o cuando la conductividad de la aleta es infinitamente grande.

Resistencia térmica, R_f

$$R_f = \frac{\theta_b}{q_f} = \frac{\theta_b}{hA_f\theta_b\eta_f} = \frac{1}{hA_f\eta_f}$$

T_b —— q_f → —— $R_f = \frac{1}{hA_f\eta_f}$ —— T_∞

Relación entre las magnitudes ε_f, η_f, R_f

$$\frac{\theta_b}{q_f} = \frac{1}{\varepsilon_f hA_{k,b}} = \frac{1}{hA_f\eta_f} = R_f$$

ALETAS RECTAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE

Condición de contorno en el extremo	EFICACIA, ε_f	RENDIMIENTO, η_f	RESISTENCIA, R
Convectiva $-k\left.\frac{d\theta}{dx}\right\|_{x=L} = h\theta(L)$	$\sqrt{\frac{p\,k}{A_k h}}\,\frac{senh(mL)+\frac{h}{mk}\cosh(mL)}{\cosh(mL)+\frac{h}{mk}senh(mL)}$	$\frac{1}{A_f}\sqrt{\frac{p\,k\,A_k}{h}}\,\frac{senh(mL)+\frac{h}{mk}\cosh(mL)}{\cosh(mL)+\frac{h}{mk}senh(mL)}$	$\frac{1}{\sqrt{h\,p\,k\,A_k}}\,\frac{\cosh(mL)+\frac{h}{mk}senh(mL)}{senh(mL)+\frac{h}{mk}\cosh(mL)}$
Adiabática $\left.\frac{d\theta}{dx}\right\|_{x=L} = 0$	$\sqrt{\frac{p\,k}{A_k h}}\tanh(mL)$	$\frac{\tanh(mL)}{mL}$	$\frac{1}{\sqrt{h\,p\,k\,A_k}}\,\frac{1}{\tanh(mL)}$
Temperatura prescrita $\theta(L) = \theta_L$	$\sqrt{\frac{p\,k}{A_k h}}\,\frac{\cosh(mL)-\frac{\theta_L}{\theta_b}}{senh(mL)}$	$\frac{1}{mL}\,\frac{\cosh(mL)-\frac{\theta_L}{\theta_b}}{senh(mL)}$	$\frac{1}{\sqrt{h\,p\,k\,A_k}}\,\frac{senh(mL)}{\cosh(mL)-\frac{\theta_L}{\theta_b}}$
$L \to \infty$ $\theta(L) = 0$	$\sqrt{\frac{p\,k}{A_k h}}$	$\frac{1}{mL}$	$\frac{1}{\sqrt{h\,p\,k\,A_k}}$

$\theta = T - T_\infty \qquad \theta_b = \theta(0) = T_b - T_\infty \qquad \theta_L = T_L - T_\infty$

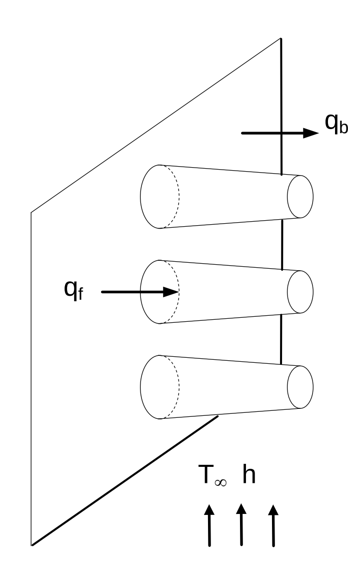
$$m^2 = \frac{h\,p}{k\,A_k}$$

Para aletas anulares con el extremo adiabático, el rendimiento η_f y la resistencia R_f valen:

$$\eta_f = \frac{q_f}{hA_f\theta_b} = \frac{2r_1}{m\left(r_2^2 - r_1^2\right)} \frac{K_1(mr_1)I_1(mr_2) - I_1(mr_1)K_1(mr_2)}{I_0(mr_1)K_1(mr_2) + K_0(mr_1)I_1(mr_2)}$$

$$R_f = \frac{\theta_b}{q_f} = \frac{m}{4\pi\, r_1\, h} \frac{I_0(mr_1)K_1(mr_2) + K_0(mr_1)I_1(mr_2)}{K_1(mr_1)I_1(mr_2) - I_1(mr_1)K_1(mr_2)}$$

6. Caracterización de una superficie aleteada



Hipótesis:

- La separación entre aletas no reduce h por entorpecimiento del flujo en las aletas del interior.

- h es el mismo sobre la superficie de las aletas que sobre el área de la base sin aletas.

Sean:

N: número de aletas

A_b: área libre de la base o área de la superficie donde apoyan las aletas descontando la ocupada por la base de las mismas ($N \cdot A_{kb}$).

A_T: área total de transferencia de calor, constiuida por el área libre de la base (A_b) y el área de convección de todas las aletas ($N \cdot A_f$): $A_T = A_b + N \cdot A_f$

Rendimiento de la superficie aleteada, η_o. Evalúa la potencia disipada por la superficie aleteada con relación a la que tendría lugar si las aletas fuesen ideales:

$$\eta_0 = \frac{q_T}{q_{T_{ALETAS\ IDEALES}}} = \frac{q_T}{hA_T\theta_b}$$

siendo q_T la potencia calorífica total evacuada a través del área total A_T, pudiendo expresarse como:

$$q_T = Nq_f + q_b = NhA_f\theta_b\eta_f + hA_b\theta_b =$$

$$= h\theta_b\left[NA_f\eta_f + \left(A_T - NA_f\right)\right] =$$

$$= hA_T\theta_b\left[\frac{N\,A_f}{A_t}\eta_f + \left(1 - \frac{N\,A_f}{A_T}\right)\right] =$$

$$= hA_T\theta_b\left[1 - \frac{N\,A_f}{A_T}\left(1 - \eta_f\right)\right]$$

Sustituyendo q_T en la expresión de η_0, resulta finalmente:

$$\eta_0 = \frac{hA_T\theta_b\left[1 - \frac{N\,A_f}{A_T}\left(1 - \eta_f\right)\right]}{hA_T\theta_b} = 1 - \frac{N\,A_f}{A_T}\left(1 - \eta_f\right)$$

Resistencia térmica de la superficie aleteada, R_T

$$R_T = \frac{\theta_b}{q_T} = \frac{\theta_b}{hA_T\theta_b\eta_0} = \frac{1}{hA_T\eta_0}$$

$$R_{Nf} = \frac{1}{NhA_f\eta_f}$$

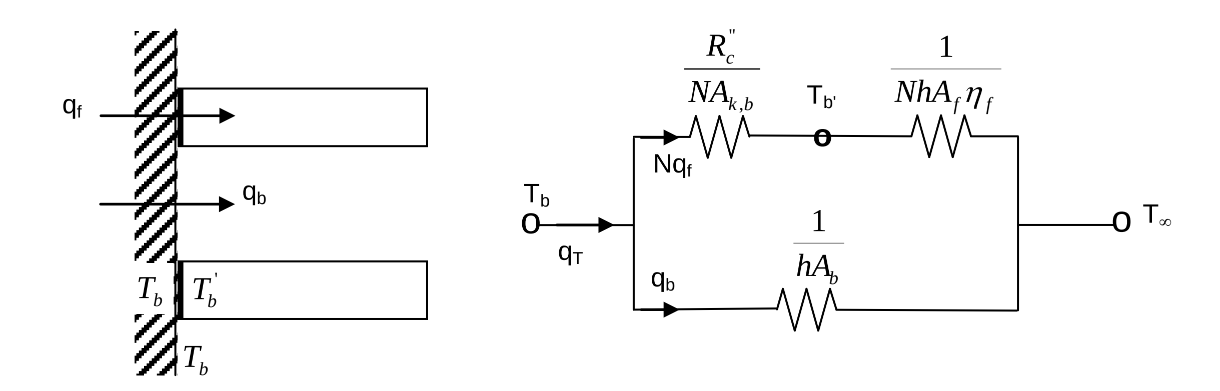
T_b q_T $N\cdot q_f$ q_b T_∞ $\equiv$ T_b q_T T_∞

$$R_b = \frac{1}{hA_b} \qquad R_T = \frac{1}{hA_T\eta_0}$$

Cuando las aletas no forman parte del material base sino que están montadas sobre él (ajuste por presión, pegadas, etc.) aparece una resistencia de contacto R''_c en la base de las mismas que debe ser tenida en cuenta:

Para una aleta: $$q''_f = \frac{T_b - T_{b'}}{R''_c}$$

Para todas las aletas: $N\,q_f = NA_{k,b}q''_f = \dfrac{T_b - T_{b'}}{\dfrac{R''_c}{NA_{k,b}}}$ donde $\dfrac{R''_c}{NA_{k,b}}$ es la resistencia total de contacto considerando todas las aletas. En forma de resistencias térmicas:



siendo T_b la temperatura del material base y $T_{b'}$ la temperatura en la base de la aleta.

La potencia calorífica total q_T que se disipa a través de la superficie aleteada A_T en presencia de resistencia de contacto en la base de las aletas viene dada por:

$$q_T = Nq_f + q_b = \frac{\theta_b}{\dfrac{R_c''}{NA_{k,b}} + \dfrac{1}{hNA_f\eta_f}} + hA_b\theta_b$$

Teniendo en cuenta que $A_b=A_T-NA_f$:

$$q_T = \theta_b\left[\frac{1}{\dfrac{R_c''hNA_f\eta_f + NA_{k,b}}{NA_{k,b}hNA_f\eta_f}} + h\left(A_T - NA_f\right)\right] =$$

$$= \theta_b hA_T\left[\frac{NA_{k,b}\dfrac{N\,A_f}{A_T}\eta_f}{R_c''hNA_f\eta_f + NA_{k,b}} + \left(1 - N\frac{A_f}{A_T}\right)\right] =$$

$$= \theta_b hA_T\left[\frac{N\dfrac{A_f}{A_T}\eta_f}{R_c''h\dfrac{A_f}{A_{k,b}}\eta_f + 1} + \left(1 - N\frac{A_f}{A_T}\right)\right] =$$

$$= \theta_b hA_T\left[1 - \frac{N\,A_f}{A_T}\left(1 - \frac{\eta_f}{R_c''h\dfrac{A_f}{A_{k,b}}\eta_f + 1}\right)\right] =$$

$$= \theta_b hA_T\left[1 - \frac{N\,A_f}{A_T}\left(1 - \frac{\eta_f}{C_1}\right)\right] \qquad \text{siendo} \qquad C_1 = R_c''h\frac{A_f}{A_{kb}}\eta_f + 1$$

Sustituyendo q_T en la expresión del rendimiento resulta:

$$\eta_{oc} = 1 - N\frac{A_f}{A_T}\left(1 - \frac{\eta_f}{C_1}\right)$$

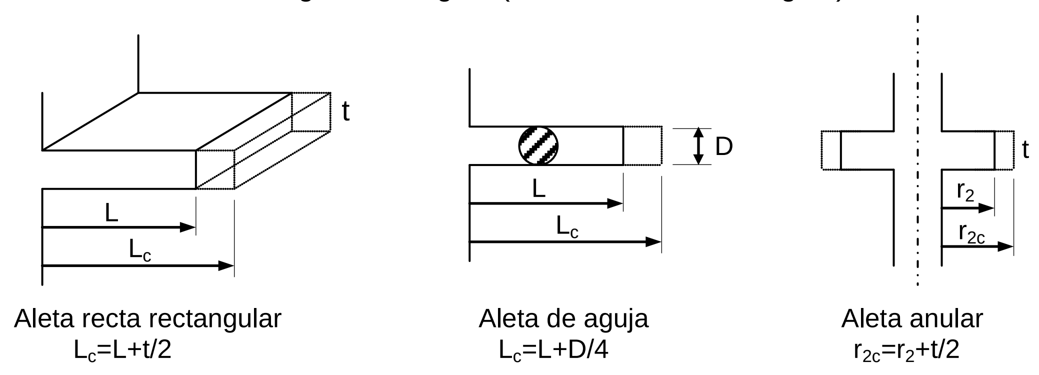
donde el subíndice c en η_{0c} indica la presencia de resistencia de contacto. La resistencia térmica total con resistencia de contacto valdrá:

$$q_T = \frac{\theta_b}{\dfrac{1}{hA_T\left[1 - \dfrac{N\,A_f}{A_T}\left(1 - \dfrac{\eta_f}{C_1}\right)\right]}} = hA_T\eta_{oc}\theta_b = \frac{\theta_b}{R_{fb,c}} \qquad R_T = \frac{1}{hA_T\eta_{oc}}$$

T_b o—/\/\/—o T_∞

q_T

El cálculo del rendimiento η_f de una aleta con condición de contorno convectiva en el extremo puede realizarse como aleta adiabática (formulación más sencilla), haciendo uso de la denominada longitud corregida (o radio exterior corregido):



Aleta recta rectangular $L_c = L + t/2$ | Aleta de aguja $L_c = L + D/4$ | Aleta anular $r_{2c} = r_2 + t/2$

Los errores asociados al uso de L_c son despreciables cuando $h \cdot t/k$ o $h \cdot D/2k$ son menores de 0,0625, para las aletas rectangulares y de aguja respectivamente, lo cual es habitual.

Conceptualmente, la aplicación de la longitud corregida, independientemente del tipo de aleta que se trate, está condicionada a que la aleta sea lo suficientemente larga como para que su temperatura no varíe de forma significativa en el tramo añadido.

La condición de contorno a aplicar en el extremo de las aletas terminadas en punta o en filo es la abiabática, dado que el área de transferencia es nulo en dicho extremo y con ello la potencia evacuada por ahí.

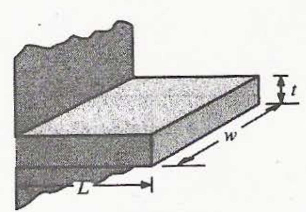
La aleta parabólica es la de mayor potencia específica (q_f/volumen), sin embargo, en su lugar se suele emplear la de geometría triangular que es de más fácil construcción y presenta una potencia específica muy similar. Las aletas más usadas en tubos circulares son la recta rectangular y la anular de espesor constante.

RENDIMIENTOS DE ALETAS CON EXTREMO ADIABATICO

Aletas rectas

Rectangular[a]

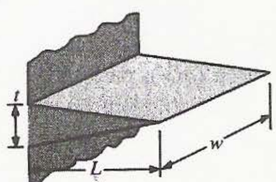
$L_c = L + (t/2)$



$$\eta_f = \frac{\tanh mL_c}{mL_c}$$

Triangular[a]

$A_f = 2w[L^2 + (t/2)^2]^{1/2}$

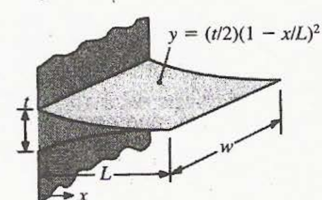


$$\eta_f = \frac{1}{mL}\frac{I_1(2mL)}{I_0(2mL)}$$

Parabólica[a]

$A_f = w[C_1L^2 + (L^2/t)\ln(t/L + C_1)]$

$C_1 = [1 + (t/L)^2]^{1/2}$



$$\eta_f = \frac{2}{[4(mL)^2 + 1]^{1/2} + 1}$$

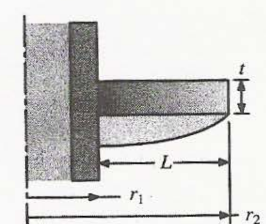
Aleta anular

Aleta circular

Rectangular[a]

$A_f = 2\pi(r_{2c}^2 - r_1^2)$

$r_{2c} = r_2 + (t/2)$



$$\eta_f = C_2\frac{K_1(mr_1)I_1(mr_{2c}) - I_1(mr_1)K_1(mr_{2c})}{I_0(mr_1)K_1(mr_{2c}) + K_0(mr_1)I_1(mr_{2c})}$$

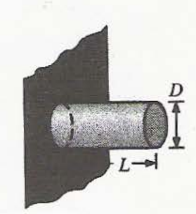
$$C_2 = \frac{(2r_1/m)}{(r_{2c}^2 - r_1^2)}$$

Aletas de aguja

Rectangular[b]

$A_f = \pi DL_c$

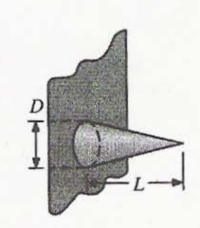
$L_c = L + (D/4)$



$$\eta_f = \frac{\tanh mL_c}{mL_c}$$

Triangular[a]

$$A_f = \frac{\pi D}{2}[L^2 + (D/2)^2]^{1/2}$$



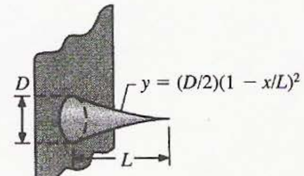
$$\eta_f = \frac{2}{mL}\frac{I_2(2mL)}{I_1(2mL)}$$

Parabólica[a]

$$A_f = \frac{\pi L^3}{8D}\{C_3C_4 - \frac{L}{2D}\ln[(2DC_4/L) + C_3]\}$$

$C_3 = 1 + 2(D/L)^2$

$C_4 = [1 + (D/L)^2]^{1/2}$



$$\eta_f = \frac{2}{[4/9(mL)^2 + 1]^{1/2} + 1}$$

Funciones de Bessel:

x	$e^{-x}\cdot I_0(x)$	$e^{-x}\cdot I_1(x)$	$e^{x}\cdot K_0(x)$	$e^{x}\cdot K_1(x)$	x	$e^{-x}\cdot I_0(x)$	$e^{-x}\cdot I_1(x)$	$e^{x}\cdot K_0(x)$	$e^{x}\cdot K_1(x)$
0,0	1,0000	0,0000	∞	∞	6,2	0,1638	0,1499	0,4940	0,5324
0,05	0,9518	0,0238	3,2739	20,9305	6,4	0,1611	0,1479	0,4865	0,5232
0,10	0,9071	0,0453	2,6823	10,8902	6,6	0,1585	0,1460	0,4793	0,5144
0,15	0,8656	0,0647	2,3586	7,5258	6,8	0,1561	0,1441	0,4724	0,5060
0,20	0,8269	0,0823	2,1408	5,8334	7,0	0,1537	0,1423	0,4658	0,4981
0,25	0,7910	0,0981	1,9793	4,8113	7,2	0,1515	0,1405	0,4595	0,4905
0,30	0,7576	0,1124	1,8526	4,1252	7,4	0,1494	0,1389	0,4535	0,4832
0,35	0,7264	0,1252	1,7493	3,6316	7,6	0,1473	0,1372	0,4476	0,4762
0,40	0,6974	0,1368	1,6627	3,2587	7,8	0,1453	0,1357	0,4420	0,4696
0,45	0,6703	0,1471	1,5886	2,9665	8,0	0,1434	0,1341	0,4366	0,4631
0,50	0,6450	0,1564	1,5241	2,7310	8,2	0,1416	0,1327	0,4314	0,4570
0,60	0,5993	0,1722	1,4167	2,3739	8,4	0,1399	0,1312	0,4264	0,4511
0,70	0,5593	0,1847	1,3301	2,1150	8,6	0,1382	0,1299	0,4215	0,4454
0,80	0,5241	0,1945	1,2582	1,9179	8,8	0,1365	0,1285	0,4168	0,4399
0,90	0,4932	0,2021	1,1972	1,7624	9,0	0,1350	0,1272	0,4123	0,4346
1,00	0,4658	0,2079	1,1445	1,6362	9,2	0,1334	0,1260	0,4079	0,4295
1,2	0,4198	0,2153	1,0575	1,4429	9,4	0,1320	0,1247	0,4036	0,4246
1,4	0,3831	0,2185	0,9881	1,3011	9,6	0,1305	0,1235	0,3995	0,4198
1,6	0,3533	0,2190	0,9309	1,1919	9,8	0,1292	0,1224	0,3955	0,4152
1,8	0,3289	0,2177	0,8828	1,1048	10,0	0,1278	0,1213	0,3916	0,4108
2,0	0,3085	0,2153	0,8416	1,0335	10,2	0,1265	0,1202	0,3879	0,4064
2,2	0,2913	0,2121	0,8057	0,9738	10,4	0,1253	0,1191	0,3842	0,4023
2,4	0,2766	0,2085	0,7740	0,9229	10,6	0,1241	0,1181	0,3806	0,3982
2,6	0,2639	0,2047	0,7459	0,8790	10,8	0,1229	0,1170	0,3772	0,3943
2,8	0,2528	0,2007	0,7206	0,8405	11,0	0,1217	0,1161	0,3738	0,3904
3,0	0,2430	0,1968	0,6978	0,8066	11,2	0,1206	0,1151	0,3705	0,3867
3,2	0,2343	0,1930	0,6770	0,7763	11,4	0,1195	0,1142	0,3673	0,3831
3,4	0,2264	0,1892	0,6580	0,7491	11,6	0,1185	0,1132	0,3642	0,3796
3,6	0,2193	0,1856	0,6405	0,7245	11,8	0,1174	0,1123	0,3612	0,3762
3,8	0,2129	0,1821	0,6243	0,7021	12,0	0,1164	0,1115	0,3582	0,3728
4,0	0,2070	0,1788	0,6093	0,6816	12,2	0,1154	0,1106	0,3553	0,3696
4,2	0,2016	0,1755	0,5953	0,6627	12,4	0,1145	0,1098	0,3525	0,3664
4,4	0,1966	0,1725	0,5823	0,6454	12,6	0,1136	0,1090	0,3497	0,3633
4,6	0,1919	0,1695	0,5701	0,6292	12,8	0,1126	0,1082	0,3470	0,3603
4,8	0,1876	0,1667	0,5586	0,6143	13,0	0,1118	0,1074	0,3444	0,3574
5,0	0,1835	0,1640	0,5478	0,6003	13,2	0,1109	0,1066	0,3418	0,3545
5,2	0,1797	0,1614	0,5376	0,5872	13,4	0,1100	0,1059	0,3393	0,3518
5,4	0,1762	0,1589	0,5280	0,5749	13,6	0,1092	0,1051	0,3368	0,3490
5,6	0,1728	0,1565	0,5188	0,5634	13,8	0,1084	0,1044	0,3344	0,3464
5,8	0,1697	0,1542	0,5101	0,5525	14,0	0,1076	0,1037	0,3321	0,3437
6,0	0,1667	0,1521	0,5019	0,5422	14,2	0,1068	0,1030	0,3298	0,3412

Funciones de Bessel en Excel:

BesselI(x;n): función de Bessel I
BesselK(x;n): función de Bessel K
x: valor del parámetro donde es evaluada la función de Bessel
n: orden (0 ó 1) de la función de Bessel

Ejercicio: Estudio cualitativo de aletas

Estudiar cualitativamente la variación que experimentan los parámetros q_f, ε_f, η_f, R_f y T_b-$T(x)$ de una aleta recta de sección constante en función de k, h, p, A_k, L. Analizar también la influencia de pasar de cc adiabática a convectiva en el extremo de la aleta.

Para aleta recta infinitamente larga:

$$q_f = \theta_b \sqrt{hpkA_k} \qquad \varepsilon_f = \sqrt{\frac{pk}{hA_k}}$$

$$R_f = \frac{1}{\sqrt{hpkA_k}} \qquad \eta_f = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{kA_k}{hp}}$$

$$T(x) - T_\infty = (T_b - T_\infty) e^{-\sqrt{\frac{hp}{kA_k}}x}$$

Para aleta recta con extremo adiabático:

$$q_f = \sqrt{hpkA_k}\,\theta_b \tanh\left(\sqrt{\frac{hp}{kA_k}}L\right) \qquad \varepsilon_f = \sqrt{\frac{pk}{hA_k}} \tanh\left(\sqrt{\frac{hp}{kA_k}}L\right)$$

$$\eta_f = \sqrt{\frac{kA_k}{hp}}\,\frac{\tanh\left(\sqrt{\frac{hp}{kA_k}}L\right)}{L} \qquad \Re_f = \frac{1}{\sqrt{hpkA_k}}\,\frac{1}{\tanh\left(\sqrt{\frac{hp}{kA_k}}L\right)}$$

$$T(x) - T_\infty = (T_b - T_\infty)\frac{\cosh\left[\sqrt{\frac{hp}{kA_k}}(L-x)\right]}{\cosh\left[\sqrt{\frac{hp}{kA_k}}L\right]}$$

Relación entre magnitudes:

$$R_f = \frac{\theta_b}{q_f} = \frac{1}{\varepsilon_f hA_{kb}} = \frac{1}{hA_f \eta_f}$$

$$\varepsilon_f = \frac{R_{kb}}{R_f}$$

De las expresiones anteriores se obtiene la tendencia creciente (↑) o decreciente (↓) entre variables:

	q_f	ε_f	η_f	R_f	T_b-T(x)
k ↑	↑	↑	↑	↓	↓
h ↑	↑	↓	↓	↓	↑
L ↑	↑	↑	↓	↓	↑
p ↑	↑	↑	↓	↓	↑
A_k↑	↑	↓	↑	↓	↓

En una aleta interesa que q_f, ε_f, η_f, sean elevados y que R_f y T_b-*T(x)* lo más pequeños posible.

Comentarios:

- En una aleta infinitamente larga, sólamente existe un pequeño tramo próximo a la base en el que T(x)~T_b y donde tiene lugar prácticamente toda la evacuación de calor. En el resto de la aleta T(x)~T_∞ y la potencia evacuada es mínima.

- Cuando la condición de contorno en el extremo de la aleta pasa de adiabática a convectiva, la potencia calorífica evacuada aumenta y con ello la eficacia.

Bibliografía

Incropera, Frank P.; DeWitt, David P. *Fundamentos de Transferencia de Calor.* Ed. Pearson.

Kreith, Frank; Bohn, Mark S. *Principios de Transferencia de Calor*. Thomsom Learning.

Nellis, Gregory; Klein, Sanford. *Heat Transfer*. Cambridge University Press.

NOTAS

NOTAS

CUADERNO



Cuadernos.ijh@gmail.com
info@mairea-libros.com

